1 確率変数と分布関数

1.1. 確率変数

例) サイコロ → 変数 X : どの数値をとるかは偶然に支配されるが X がある特定の数値 x をとる確率 $P(x)$ は決まっている

変数 $X \in \underbrace{1, 2, \cdots, 6}$

$x_i : i = 1, \cdots, 6$

確率分布 $P(x_i) = 1/6 \quad (x = x_i)$

確率密度関数 $\quad = 0 \quad (x \neq x_i)$

$\Big\} \ \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \delta(x-i)/6}$

Dirac のデルタ関数

$\delta(x) = 1 \quad (x = 0)$

$\quad = 0 \quad (x \neq 0)$

~~例) $\int_{-\infty} dx\, P(x) = \ldots$~~

確率密度関数 $P(x)$ の性質　　x が実数の場合.

i) $\quad P(x) \geq 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x) = 1$

ii) ~~X の任意の関数 $f(X)$ について~~

~~平均 $\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(X) P(X)$~~

X の任意の関数 $f(X)$ について.

平均値. $\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) P(x)$

$f(X) = X$ の時

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x P(x)$$

~~iii) 分散とモーメント(m次元)~~

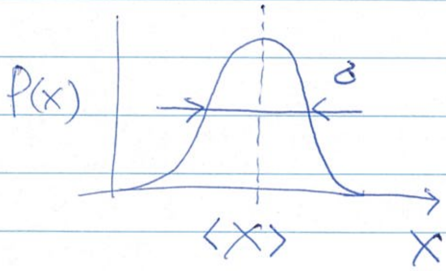
iii) m次モーメント.

$$\mu_m \equiv \langle X^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^m P(x)$$

$\mu_1 = \langle X \rangle$ 平均は1次モーメント.

iv) 分散.

$$\sigma^2 \equiv \langle (X - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$
$$= \mu_2 - \mu_1^2$$



v) 特性関数.

$$\underset{\sim\sim\sim}{G(k)} \equiv \langle \exp(ikX) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{ikx} P(x)$$

特性関数.

$$e^{ikx} = 1 + ikx + \frac{1}{2!}(ik)^2 x^2 + \frac{1}{3!}(ik)^3 x^3$$

$$\therefore\; G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^n \frac{\mu_n}{n!}$$

※ $(ik)^n$ の係数を $n!$ 倍すると μ_n になっている.

$$G(k)\big|_{k=0} = 1.$$

$$G'(k)\big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, i x\, P(x) = i\mu_1$$

$$G''(k)\big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, i^2 x^2 P(x) = i^2 \mu_2$$

$$\vdots$$

$$G^{(m)}(k)\big|_{k=0} = i^m \mu_m$$

確率密度関数 $P(n)$ の性質　$n \geq$ の整数の場合
(分布関数)

i) $0 \leq P(n) \leq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1.$$

ii) 平均　$\langle f(N) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) P(n)$

$$\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(n) = \mu_1$$

iii) m 次モーメント.　$\mu_m \equiv \langle N^m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^m P(n)$

iv) 分散.　$\sigma^2 \equiv \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$

$$= \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \mu_2 - \mu_1$$

v) 特性関数.

$$G(k) \equiv \langle e^{ikn} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ikn} P(n)$$

$z = e^{ik}$ とおいて.

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n)$$

$$\therefore \quad G(z)\big|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1.$$

$$G'(z)\big|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(n) = \mu_1$$

$$G''(z)\big|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P(n) = \langle N(N-1) \rangle$$

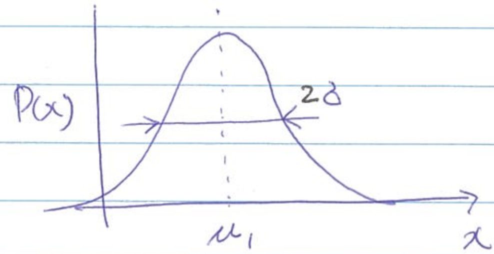
$\vdots$

1.2 主な分布関数

i) Gauss 分布（正規分布）

$$P(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle x \rangle &= \mu_1 \\ \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 &= \sigma^2 \end{aligned}}$$



例) 気体の分子の速度分布. ⟹ Maxwell - Boltzman 分布.

$$\begin{cases} \langle v_x \rangle = 0 \\ \langle v_x^2 \rangle = \sigma^2 = \dfrac{k_B T}{m} \end{cases}$$

$$P(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{k_B T}{m}}} \exp\left(- \frac{v_x^2}{\frac{2k_B T}{m}} \right)$$

ii) 2項分布

ある試行の結果は、+1 か −1 であり、各々の出現確率は、p と $q = 1-p$ であるとする。
M回試行を行い、+1 という結果が N回出現したとする。
$N = n$ となる確率は、2項分布、

$$P(n; M) = \frac{M!}{n!(M-n)!} p^n q^{M-n}$$

に従う。

$$\boxed{\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{n=0}^{M} n P(n; M) = Mp \\ \delta^2 &\equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = Mpq \end{aligned}}$$

~~ここは不正確~~
ここは不正確。次頁のノートを見よ！

$M \gg 1$, $\langle N \rangle \gg 1$ の時、$n \gg 1$ であれば
スターリングの公式 $n! \simeq (2\pi n)^{1/2} (n/e)^n$ より、

$$P(n; M) \simeq (2\pi M)^{-1/2} e^D$$

$$D \equiv -(n + \cancel{\tfrac{1}{2}}) \ln\left(\frac{n}{M}\right) - (M - n + \cancel{\tfrac{1}{2}}) \ln\left(1 - \frac{n}{M}\right)$$

※ここの計算

$$+ n \ln p + (M-n) \ln q$$

$$\simeq -\frac{(\delta n)^2}{2\delta^2} \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta n &\equiv n - \langle N \rangle \\ \delta^2 &\equiv Mpq \end{aligned} \right.$$

$$\therefore \ P(\delta n; M) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-(\delta n)^2/2\delta^2}$$

ガウス分布

ライフ"統計熱物理学の基礎"
上. P 26, 27

✡ 2項分布 → Gauss 分布

$$P(m;M) = \frac{M!}{m!\,(M-m)!}\, p^m q^{M-m} \qquad ①$$

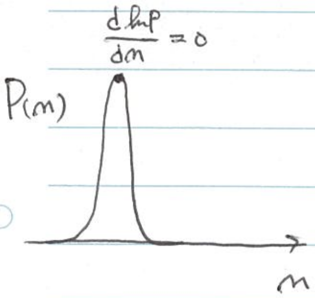
$$\ln P(m;M) = \ln M! - \ln m! - \ln (M-m)! + m \ln p + (M-m) \ln q \qquad ②$$

スターリングの式
$\ln m! \simeq m \ln m - m + \frac{1}{2}\ln(2\pi m)$
$\simeq m \ln m - m$

$$\simeq M(\ln M - 1) - m(\ln m - 1) - (M-m)(\ln(M-m) \cdot + m \ln p + (M-m)\ln q \qquad ③$$

$$\therefore \frac{d \ln P}{dm} \simeq -(\ln m + 1) + (\ln(M-m) + 1) + \ln p - \ln q \qquad ④$$

$$\simeq -\ln m + \ln(M-m) + \ln p - \ln q \qquad ⑤$$



m, M が大きいとき $P(m)$ ($\overbrace{\text{も} \ln P(m) \text{も}}$) のピークはするどい.

$$\rightarrow \left.\frac{d \ln P}{dm}\right|_{m=\langle N\rangle} = 0 \qquad ⑥$$

$$\therefore \frac{d \ln P}{dm} \simeq \ln\left(\frac{M-m}{m}\right) + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = 0. \qquad ⑦$$

$$\therefore \frac{m}{M-m} = \frac{p}{1-p} \rightarrow \underline{m = \langle N \rangle = Mp} \;/\!/ \qquad ⑧$$

$\ln P(n)$ を　$n = \langle N \rangle + \delta n$ でテイラー展開すると，

$$\ln P(n) = \ln P(\langle N \rangle) + \underbrace{\left.\frac{d \ln P}{dn}\right|_{n=\langle N \rangle}}_{\equiv 0} \delta n + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 \ln P}{dn^2}\right|_{n=\langle N \rangle} \delta n^2 + \cdots \quad ⑨$$

⑤より：　$\displaystyle \frac{d^2 \ln P}{dn^2} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{M-n}$

$$\left.\frac{d^2 \ln P}{dn^2}\right|_{n=\langle N \rangle} = -\frac{1}{Mp} - \frac{1}{M-Mp} = \underbrace{-\frac{1}{Mp(1-p)}}_{\equiv -\sigma^{-2}}$$

$$\therefore \quad P(n) = \text{const.} \exp\left(-\frac{\delta n^2}{2\sigma^2}\right)$$

$\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} P(n)\, dn = 1$　より．

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta n^2}{2\sigma^2}\right)$$

Gauss分布．//

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

No.

iii) Poisson 分布.

$$p(n) = a^n e^{-a} / n!$$

$$\cancel{\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(n) = a}$$

$$\cancel{\langle N(N-1) \rangle =}$$

特性関数. $G(z) = e^{a(z-1)}$ ⟹ 証明は次ページ.

$$\langle N \rangle = \left.\frac{dG(z)}{dz}\right|_{z=1} = a.$$

$$\langle N(N-1) \rangle = \left.\frac{d^2G(z)}{dz^2}\right|_{z=1} = a^2$$

$$\therefore \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \equiv \sigma^2 = a.$$

☆ Poisson分布 vs. 2項分布.

面積 S の運動場に M 粒の雨滴が落ちたとする. 運動場の中の小部分(面積 A)に落ちた雨滴を N とすると. $p \equiv A/S \equiv 1-q$ として. $N=n$ となる確率は 2項分布.

$$P(n:M) = \frac{M!}{n!(M-n)!} p^n q^{M-n}$$

ここで $M \to \infty$, $S \to \infty$ として $a \equiv M/S$ が一定となる極限を考えると.

特性関数.

$$G(z) = G(e^{ik}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ikn} \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

$$= e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ik}a)^n}{n!}$$

指数関数のマクローリン展開

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ の形をしているので

$$G(z) = e^{-a} e^{e^{ik}a}$$

$$= e^{e^{ik}a - a}$$

$$= e^{a(e^{ik}-1)}$$

$$= e^{a(z-1)}$$

//

$\frac{A}{S} = p = Aa/M$ 　なので　$\langle N \rangle = Aa$ （有限）

$$p(n:M) = \frac{M!}{n!\,(M-n)!} p^n q^{M-n}$$

M^n　$M-n \to M$

$$\simeq M^n \left(\frac{Aa}{M}\right)^n \left(1-\frac{Aa}{M}\right)^M \frac{1}{n!}$$

$$= (Aa)^n e^{-aA} / n!$$

（Poisson分布）

pがすごく小さい（めったに起こらない事象）

$\longrightarrow$ 2項分布 $\Longrightarrow$ Poisson分布.

cf. pが小さくない場合.

$\longrightarrow$ 2項分布 $\Longrightarrow$ Gauss分布.

科　試験科目

第　問答案　枚ノ内　第　学年　氏名

中心極限定理

（任意の分布関数）

元の確率変数 X の分布関数を $P(X)$ とする。

ただし $\begin{cases} \text{平均} & \mu \\ \text{分散} & \sigma^2 \end{cases}$

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

X から n 個取り出した平均値を $\bar{X}_n$ とする。この操作をくり返すと $\bar{X}_n$ は新しい確率変数となる。この $\bar{X}_n$ の分布関数は n が大きい時に正規分布に~~~~近づく

ただし $\begin{cases} \text{平均} & \mu \\ \text{分散} & \sigma^2/n \end{cases}$

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{X}_n$$

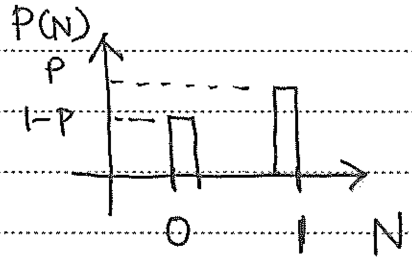
なので、X から n 個取り出した和 S_n についても正規分布に~~したがう~~近づく

ただし $\begin{cases} \text{平均} & n\mu \\ \text{分散} & \sigma^2 n \end{cases}$

X 任意分布 $\begin{pmatrix} \text{平均 } \mu \\ \text{分散 } \sigma^2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{n\text{個取り出して}}$ 平均 $\bar{X}_n$ $\begin{pmatrix} \text{平均 } \mu \\ \text{分散 } \sigma^2/n \end{pmatrix}$　和 S_n $\begin{pmatrix} \text{平均 } n\mu \\ \text{分散 } \sigma^2 n \end{pmatrix}$

の正規分布

① 二項分布



平均 $\mu = p$.
分散 $\sigma^2 = p(1-p)^2 + (1-p)p^2$
$= p(1-p)$

1回の試行では確率 p で 1，確率 $(1-p)$ で 0.

これを m 回くり返すと その和 S_m は二項分布

$$P(S_m ; m) = \frac{m!}{S_m!(m-S_m)!} p^{S_m} (1-p)^{m-S_m}$$

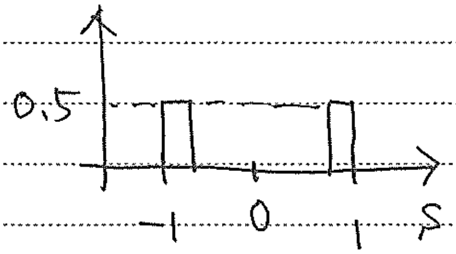
にしたがう。

中心極限定理によると、S_m の分布関数は

平均 mp，分散 $mp(1-p)$ の正規分布

に近づく.

② ランダムウォーク



平均 $\mu = 0$

分散 $\sigma^2 = 0.5 \times 1^2 + 0.5 \times 1^2$

$= 1.$

1回の試行では ±1が 50%の確率で起こる。

これを n 回くり返すと その和 S_n は、

$$n_+ + n_- = n$$

$$n_+ - n_- = S_n$$

$$\Downarrow$$

$$n_+ = \frac{n + S_n}{2}$$

二項分布 $P\left(\frac{n+S_n}{2} ; n\right)$ にしたがう。

中心極限定理によると S_n の分布関数は

平均 $n\mu = 0$, 分散 $n\sigma^2 = n$

の正規分布に近づく。

//

中心極限定理の証明.

$$s_n \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\underline{\frac{x_i-\mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\underline{z_i}$$

$\mu=0$
$\sigma^2=1$

s_n の特性関数

$$G_{s_n}(k) = \langle e^{iks_n}\rangle = \left\langle \exp\left[ik\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} z_i\right]\right\rangle$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left\langle \exp\left[i\frac{k}{\sqrt{n}} z_i\right]\right\rangle$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underline{G_z\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)}$$

z_i の特性関数

$$= \left(G_z\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$\cancel{G_z(k) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\frac{\mu_m}{m!}} \quad \text{~~なので.~~}$$

$$\cancel{G_z\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = \mu_0 +}$$

$G_z\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$ を, $k=0$ のまわりでテイラー展開.

$$G_z\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = G_z(0) + G_z'(0)\frac{k}{\sqrt{n}} + G_z''(0)\frac{k^2}{2n} + \cdots$$

特性関数の性質より. $G_z(0)=1$, $G_z'(0)=i\mu=0$, $G_z''(0)=i^2\mu_2=-\sigma^2=-1$

$$\simeq 1 - \frac{k^2}{2n}$$

$$\therefore \quad G_{S_n}(k) = \left(1 - \frac{k^2}{2n}\right)^n$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{より}.$$

$$G_{S_n}(k) = e^{-\frac{k^2}{2}}$$

ここで、Gauss分布 $P(x)$ の特性関数をもとめると
$(\bar{\mu}=0,\ \sigma^2=1)$

$$G_X(k) = \langle e^{ikx}\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}+ikx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-ik)^2}{2}-\frac{k^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{k^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-ik)^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{k}{2}}$$

//

よって S_n は $\mu=0$, $\sigma^2=1$ の Gauss分布
に従う.